

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025****CLASA a V-a – soluții și bareme**

Problema 1. La cercul de robotică al unei școli, elevii lucrează în echipe complete de câte trei băieți și o fată. Într-o zi, au lipsit două fete și un băiat, iar elevii au fost regrupați astfel încât în fiecare echipă nou-formată au fost câte o fată și patru băieți.

Câți elevi sunt înscriși la cercul de robotică al acelei școli?

Soluție. Dacă elevii lucrează în echipe de câte o fată și trei băieți, înseamnă că se pot grupa astfel: (F, B, B, B) (F, B, B, B) (F, B, B, B) ... (F, B, B, B) **1p**

Când lipsesc două fete și un băiat, două grupe rămân incomplete (mutând un băiat dintr-o grupă în alta dacă băiatul absent nu face parte din aceeași grupă cu una dintre fetele absente):

(F', B, B, B) (F', B, B, B) (F, B, B, B) ... (F, B, B, B) **1p**

Cum fiecare grupă nouă conține câte o singură fată, cei 2+3 băieți rămași din grupele incomplete trebuie regrupați astfel încât să completeze grupele cu câte 3 băieți și o fată până la patru băieți, așadar câte încă unul în fiecare grupă. **2p**

Deoarece toate grupele nou formate conțin exact câte 4 băieți și o fată, deducem că au fost formate exact 5 astfel de grupe. Așadar, în ziua în care au lipsit cei trei copii, au fost prezenți $5 \cdot 4 = 20$ băieți și 5 fete. **2p**

Așadar, la cercul de robotică sunt înscriși $20 + 1 = 21$ de băieți și $5 + 2 = 7$ fete, în total 28 de elevi. **1p**

Soluție alternativă.

Dacă f este numărul fetelor de la cercul de robotică, numărul băieților este egal cu $3f$. **1p**

Când lipsesc două fete și un băiat, numărul fetelor devine $f - 2$, iar al băieților $3f - 1$. **1p**

Dacă elevii se pot grupa astfel încât fiecare grupă să conțină o fată și patru băieți, atunci $4 \cdot (f - 2) = 3f - 1$ **2p**

Obținem $4f - 8 = 3f - 1$, de unde $f = 7$ **2p**

În consecință, numărul băieților este $3 \cdot 7 = 21$, deci la cercul de robotică sunt $7 + 21 = 28$ de elevi **1p**

Problema 2. Se consideră numărul $n = 2^x + 2^y + 2^z + 2^t$, unde x, y, z, t sunt numere naturale distincte. Împărțind numărul n la 305, se obține câtul 2^a și restul 0, unde a este un număr natural.

Determinați restul împărțirii sumei $a + x + y + z + t$ la 5.

Gazeta Matematică

Soluție. Presupunem, fără a restrânge generalitatea problemei, că $x < y < z < t$.

Atunci $2^x + 2^y + 2^z + 2^t = 305 \cdot 2^a$, de unde $2^x \cdot (1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x}) = 305 \cdot 2^a$, (1) ... **1p**

Cum $x < y < z < t$, rezultă că $y - x$, $z - x$ și $t - x$ sunt numere naturale nenule, deci 2^{y-x} , 2^{z-x} , 2^{t-x} sunt numere pare, iar $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x}$ este impar. **1p**

Din motive de paritate, din relația (1) deducem că $2^x = 2^a$ și $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x} = 305$,
 deci $x = a$, iar $2^{y-x} + 2^{z-x} + 2^{t-x} = 304$ **2p**
 Obținem $2^{y-x} \cdot (1 + 2^{z-y} + 2^{t-y}) = 2^4 \cdot 19$, de unde $y - x = 4$, deci $y = a + 4$ **1p**
 În plus, $1 + 2^{z-y} + 2^{t-y} = 19$, deci $2^{z-y}(1 + 2^{t-z}) = 2 \cdot 9$, de unde reiese că $z - y = 1$ și
 $t - z = 3$, adică $z = y + 1 = a + 5$ și $t = z + 3 = a + 8$ **1p**
 Ca urmare, $a + x + y + z + t = a + a + (a + 4) + (a + 5) + (a + 8) = 5a + 17 = 5 \cdot (a + 3) + 2$,
 deci restul împărțirii sumei $a + x + y + z + t$ la 5 este egal cu 2 **1p**

Problema 3. Pe ecranul monitorului unui calculator sunt afișate toate numerele naturale de la 1 la 2025. Un virus șterge o parte dintre aceste numere după următorul algoritm:

- la pasul 1 se șterge un număr dintre cele afișate pe ecran și succesorul acestuia;
- la fiecare nou pas, dintre numerele rămase pe ecran după pasul precedent se șterg două numere, astfel încât unul dintre numerele șterse să fie succesorul celuilalt număr șters.

Algoritmul se oprește după 674 de pași.

a) Arătați că suma numerelor rămase pe ecran nu este divizibilă cu 6.

b) Arătați că produsul numerelor rămase pe ecran este divizibil cu 6.

Soluție. a) La fiecare pas, se șterg câte două numere consecutive, adică un număr par și un număr impar. După 674 de pași, se șterg 674 de numere pare și 674 de numere impare. ... **1p**

Deoarece pe ecran sunt scrise inițial 1012 numere pare și 1013 numere impare, pe ecran rămân 338 de numere pare și 339 de numere impare **1p**

Întrucât suma unui număr impar de numere impare este un număr impar, deducem că suma numerelor rămase pe ecran este un număr impar, care nu poate fi divizibil cu 6 **1p**

b) Dintre două numere naturale consecutive, cel mult unul este multiplu de 3, deci la fiecare dintre cei 674 de pași se șterge cel mult un multiplu de 3 **1p**

Deoarece printre numerele de la 1 la 2025 se află 675 de multipli de 3, la oprirea algoritmului rămâne pe ecran cel puțin un număr natural divizibil cu 3, adică un număr m de forma $m = 3a$, unde a este număr natural nenul **1p**

Alegând un număr par n , $n = 2b$, unde b este număr natural nenul, dintre cele 338 de numere pare rămase pe ecran, deducem că produsul numerelor rămase pe ecran conține factorul $m \cdot n = 6 \cdot a \cdot b$, deci este divizibil cu 6 **2p**

Problema 4. Andrei scrie numărul 2025 ca sumă de 40 de numere naturale nenule, oricare două diferite.

Determinați care este cea mai mică valoare pe care o poate lua cel mai mare dintre cele 40 de numere din sumă.

Soluție. Fie $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{40}$ astfel încât $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{40} = 2025$.

Atunci $a_2 \geq a_1 + 1$, $a_3 \geq a_2 + 1$, $a_4 \geq a_3 + 1$, ..., $a_{40} \geq a_{39} + 1$ **1p**

În consecință, $a_{40} \geq a_1 + 39$, $a_{40} \geq a_2 + 38$, ..., $a_{40} \geq a_{38} + 2$ **2p**

Atunci $40 \cdot a_{40} \geq (a_1 + 39) + (a_2 + 38) + \dots + (a_{37} + 3) + (a_{38} + 2) + (a_{39} + 1) + a_{40}$, deci $40 \cdot a_{40} \geq 2025 + (1 + 2 + \dots + 39) = 2805$, iar cum $a_{40} \in \mathbb{N}$, deducem că $a_{40} \geq 71$ **2p**

Întrucât 2025 se poate scrie ca suma a 40 de numere naturale nenule distincte astfel încât cel mai mare dintre ele să fie 71, de exemplu $1 + 29 + 34 + 35 + 36 + \dots + 70 + 71 = 2025$, rezultă că cea mai mică valoare posibilă a lui a_{40} este 71 **2p**

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană a Sectoarelor Municipiului București, 2025****CLASA a VI-a - soluții**

Problema 1. Fie numerele naturale a, b, c pentru care numerele $m = \frac{5a + 6b + 7c + 6}{4a + 3b + 2c + 3}$ și $n = \frac{a + 2b + 3c + 5}{3a + b + 2c + 5}$ sunt simultan numere naturale.

a) Arătați că $m \geq 2$.

b) Determinați numerele m și n .

Soluție. a) Dacă $m \leq 1$, atunci $5a + 6b + 7c + 6 \leq 4a + 3b + 2c + 3$, adică $a + 3b + 5c + 3 \leq 0$, ceea ce nu se poate. Deci $m \geq 2$ **2p**

b) Nu putem avea $n \geq 2$, deoarece ar rezulta $a + 2b + 3c + 5 \geq 6a + 2b + 4c + 10$, deci $0 \geq 5a + c + 5$, fals. Cum $n > 0$, obținem $n = 1$ **1p**

Din $n = 1$ obținem $a + 2b + 3c + 5 = 3a + b + 2c + 5$, deci $b + c = 2a$ **1p**

Dacă, prin absurd, $m \geq 3$, ar rezulta $5a + 6b + 7c + 6 \geq 12a + 9b + 6c + 9$, de unde $c \geq 7a + 3b + 3$. Adunând b în ambii membri, obținem $b + c \geq 7a + 4b + 3$, adică $2a \geq 7a + 4b + 3$, deci $0 \geq 5a + 4b + 3$, fals. Așadar, $m < 3$, de unde, având în vedere punctul a), obținem $m = 2$ **2p**

Din $m = 2$ rezultă $5a + 6b + 7c + 6 = 8a + 6b + 4c + 6$, adică $c = a$ și cum $b + c = 2a$, deducem $a = b = c$. Așadar, $m = 2$ și $n = 1$, valori care se obțin pentru $a = b = c$. .. **1p**

Problema 2. Aflați numerele naturale nenule a și b pentru care

$$\frac{a}{(a, b)} = b + \frac{48 \cdot (a, b)}{[a, b]} \quad \text{și} \quad \frac{b}{(a, b)} = a - \frac{312 \cdot (a, b)}{[a, b]}.$$

Am notat cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b , iar cu $[a, b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Gazeta Matematică

Soluție. Observăm că $a \geq \frac{a}{(a, b)} > b$ **1p**

Notăm cu $d = (a, b)$. Atunci $a = dx, b = dy, [a, b] = dxy$ cu $(x, y) = 1, x > y$. Obținem $x = dy + \frac{48}{xy}$ și $y = dx - \frac{312}{xy}$, (1).

Așadar, $xy \mid 48$ și $xy \mid 312 \Rightarrow xy \mid (48, 312) = 24$ **2p**

Continuarea 1.

Tot din (1) rezultă $xy(x - dy) = 48$ și $xy(dx - y) = 312 \Rightarrow \frac{x - dy}{dx - y} = \frac{48}{312} = \frac{2}{13} \Rightarrow x(13 - 2d) = y(13d - 2) \Rightarrow 13 - 2d > 0$ **1p**

- Avem de analizat cazurile: I. $d = 1 \Rightarrow 11x = 11y \Rightarrow a = b$, fals, deoarece $a > b$.
 II. $d = 2 \Rightarrow 3x = 8y$. Cum $(x, y) = 1$, obținem $x = 8, y = 3$, deci $a = 16, b = 6$ **1p**
 III. $d = 3 \Rightarrow 7x = 37y \Rightarrow x = 37, y = 7$, fals, deoarece $xy \nmid 24$.
 IV. $d = 4 \Rightarrow x = 10y \Rightarrow x = 10, y = 1$, fals, deoarece $xy \nmid 24$.
 V. $d = 5 \Rightarrow x = 21y \Rightarrow x = 21, y = 1$, fals, deoarece $xy \nmid 24$.
 VI. $d = 6 \Rightarrow x = 76y \Rightarrow x = 76, y = 1$, fals, deoarece $xy \nmid 24$ **2p**

Continuarea 2.

Din $xy \mid 24$ rezultă că $xy \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, de unde rezultă (și se analizează) cazurile $(x, y) \in \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (6, 1), (3, 2), (8, 1), (12, 1), (4, 3), (24, 1), (8, 3)\}$.
 Obținem $x = 8, y = 3$, care implică $d = 2$ și soluția unică $a = 16, b = 6$ **4p**

Problema 3. Fie ABC un triunghi isoscel cu $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ și $AB = AC$. Considerăm punctul D pe latura AC și punctele distincte E, F, G pe latura AB astfel încât $BC = BD = DE = EF$, iar $DG = DF$.

- a) Arătați că $BF = GE$.
 b) Aflați măsura unghiului BCG .

Soluție.

- a) $\triangle DFG$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DFG = \sphericalangle DGF \Rightarrow \sphericalangle DFB = \sphericalangle DGE$ (1) **1p**
 $\triangle BDE$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DBF = \sphericalangle DEG$ (2) **1p**
 Din (1),(2) și $BD = DE$, obținem $\triangle BDF \equiv \triangle EDG$ (L.U.U.) $\Rightarrow BF = GE$. . . **2p**
 b) $\triangle ABC$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \frac{180^\circ - \sphericalangle BAC}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$ **1p**
 $BF = GE \Rightarrow BG = FE = BC \Rightarrow \triangle BCG$ isoscel **1p**
 Deci $\sphericalangle BCG = \sphericalangle BGC = \frac{180^\circ - \sphericalangle CBG}{2} = \frac{105^\circ}{2} = 52^\circ 30'$ **1p**

Problema 4. Determinați numerele naturale $n \geq 2$ cu proprietatea că n este divizibil cu fiecare dintre numerele

$$d_1, d_1 + d_2, \dots, d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1},$$

unde $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{k-1} < d_k = n$ sunt toți divizorii naturali ai lui n .

Soluție. Numerele prime au proprietatea din enunț, deoarece, dacă n este număr prim, divizorii săi sunt $1 = d_1 < d_2 = n$, iar n este divizibil cu d_1 **1p**

Fie n un număr compus, având $k \geq 3$ divizori, cu proprietatea din enunț.

Presupunând că n este număr impar, toți cei k divizori ai săi sunt numere impare. Din ipoteză, n este divizibil cu $d_1 + d_2$, care este număr par, deci n ar trebui să fie tot număr par, contradicție. Așadar, n este număr par. **2p**

Atunci $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, deci n este divizibil și cu $d_1 + d_2 = 3$, deci $d_3 = 3$. În plus, deducem că $6 \mid n$ **1p**

Deoarece, pentru orice divizor d al lui n , numărul $\frac{n}{d}$ este de asemenea un divizor al lui n , deducem că $\frac{n}{6}$, $\frac{n}{3}$ și $\frac{n}{2}$ se află printre cei k divizori ai lui n **1p**

Cum n este divizibil cu $d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1}$, rezultă că $n \geq d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1} \geq \frac{n}{6} + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} = n$.

Deducem că singurii divizori ai lui n , mai mici decât n , sunt $\frac{n}{6}$, $\frac{n}{3}$ și $\frac{n}{2}$, deci $\frac{n}{6} = d_1 = 1$, $\frac{n}{3} = d_2 = 2$ și $\frac{n}{2} = d_3 = 3$, deci $n = 6$ este singurul număr compus cu proprietatea din enunț **2p**



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025

CLASA a VII-a – soluții

Problema 1. Determinați numerele naturale de patru cifre $\overline{abcd}$ pentru care numărul $\sqrt{ab} - 4 + \sqrt{cd}$ este pătratul unui număr prim p , iar $\overline{cd} - \overline{ab} = p + 2$.

Gazeta Matematică

Soluție. Deoarece $p^2 = \sqrt{ab} - 4 + \sqrt{cd} < 10 + 10 = 20$, numărul p poate fi 2 sau 3 **3p**

Dacă $p = 2$, atunci $\overline{cd} = \overline{ab} + 4$ și $\sqrt{ab} - 4 + \sqrt{\overline{ab} + 4} = 4$, (1). Ecuația (1) are soluția $\overline{ab} = 5$, care este și unică (alte numere sunt fie prea mari, fie prea mici), valoare care nu convine ... **2p**

Dacă $p = 3$, atunci $\overline{cd} = \overline{ab} + 5$ și $\sqrt{ab} - 4 + \sqrt{\overline{ab} + 5} = 9$, (2). Ecuația (2) are soluția $\overline{ab} = 20$, care este și unică (același argument ca mai sus) și obținem $\overline{abcd} = 2025$ **2p**

Altă soluție. Deoarece $\overline{ab} - 4$ și $\overline{cd}$ sunt numere naturale și $\sqrt{\overline{ab} - 4} + \sqrt{\overline{cd}} \in \mathbb{N}$, rezultă că există $k, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\overline{ab} - 4 = k^2$ și $\overline{cd} = n^2$, deci $k + n = p^2$. (1) **2p**

Cum $\overline{cd} - \overline{ab} = p + 2$, scăzând primele două egalități obținem $p + 6 = n^2 - k^2 = (n - k)(n + k)$. Folosind (1) deducem că $p + 6 = (n - k) \cdot p^2$, prin urmare $p \mid (p + 6)$, deci $p \in \{2, 3\}$ **1p**

Dacă $p = 2$, obținem $k + n = 4$ și $n - k = 2$, deci $k = 1$ și $n = 3$, așadar $\overline{ab} = 5$, fals **2p**

Dacă $p = 3$, obținem $k + n = 9$ și $n - k = 1$, deci $k = 4$ și $n = 5$, așadar $\overline{ab} = 20$ și $\overline{cd} = 25$, care verifică ipoteza. Prin urmare, numărul căutat este 2025 **2p**

Problema 2. Determinați mulțimea numerelor raționale r pentru care există numerele naturale nenule a și b astfel încât $\frac{a+b}{2} - \sqrt{a \cdot b} = r$.

Soluție. Pentru $r \in \mathbb{Q}$ și $a, b \in \mathbb{N}^*$ ca în enunț, $r = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$, deci $r \geq 0$ **2p**

De asemenea, ab trebuie să fie pătratul unui număr natural n . Rezultă $r = \frac{a+b-2n}{2} = \frac{m}{2}$, unde m este număr întreg, deci r este un număr de forma $\frac{m}{2}$, cu $m \in \mathbb{N}$ **2p**

Reciproc, pentru $a = b = 1$ obținem $r = 0$, iar pentru $a = m$ și $b = 4m$, cu $m \in \mathbb{N}^*$, obținem $r = \frac{5m}{2} - 2m = \frac{m}{2}$, cu $m \in \mathbb{N}^*$. Astfel, mulțimea cerută conține toate numerele de forma $\frac{m}{2}$, cu $m \in \mathbb{N}$ **2p**

Mulțimea cerută este $\left\{ \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{N} \right\}$ **1p**

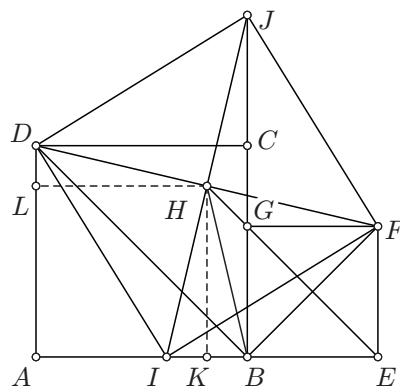
Problema 3. Considerăm pătratele $ABCD$ și $BEFG$, astfel încât B se află pe segmentul (AE) și G se află pe segmentul (BC) . Fie H intersecția dreptelor DF și EG . Perpendiculara în H pe DF taie dreptele AE și BC în punctele I , respectiv J . Arătați că patrulaterul $DIFJ$ este pătrat.

Soluție. $\sphericalangle GBF = \sphericalangle DBC = 45^\circ$, deci triunghiul DBF este dreptunghic în B . Cum EG este mediatoarea catetei BF a triunghiului BDF , reiese că H este mijlocul ipotenuzei DF . **2p**

Fie K proiecția lui H pe AE . Deoarece H este mijlocul lui DF și $HK \parallel AD$, rezultă că HK este linie mijlocie în trapezul dreptunghic $AEFD$, prin urmare K este mijlocul segmentului AE . Rezultă că $\triangle HAE$ este isoscel, deci $\sphericalangle HAE = \sphericalangle HEA = 45^\circ$, adică $H \in AC$ **2p**

Fie L proiecția lui H pe AD . Atunci $\triangle HAK \equiv \triangle HAL$ (I.U.), deci $HK = HL$. Apoi $\angle KHI + \angle IHL = 90^\circ = \angle DHL + \angle IHL$ implică $\angle KHI = \angle LHD$, de unde $\triangle HKI \equiv \triangle HLD$ (C.U.), deci $HI = HD$ **2p**

Avem și $\triangle HAB \equiv \triangle HAD$ (L.U.L.), deci $HB = HD = HI$. Reiese că punctul K este mijlocul segmentului BI , KH este linie mijlocie în $\triangle IBJ$, iar H este mijlocul segmentului IJ . Astfel diagonalele patrulaterului $DIFJ$ sunt egale, se taie în părți egale și sunt perpendiculare, deci $DIFJ$ este pătrat **1p**



Altă soluție. Ca mai sus, H este mijlocul lui DF **2p**

Dreapta IJ este mediatoarea segmentului DF , deci $DI = IF$ **1p**

$\angle IHF = \angle IEF = 90^\circ$, deci patrulaterul $IEFH$ este inscriptibil, așadar $\angle IFH = \angle IEH = 45^\circ$. Cum triunghiul IFD este isoscel, obținem $\angle IFD = \angle IDF = 45^\circ$ și $\angle DIF = 90^\circ$ **2p**

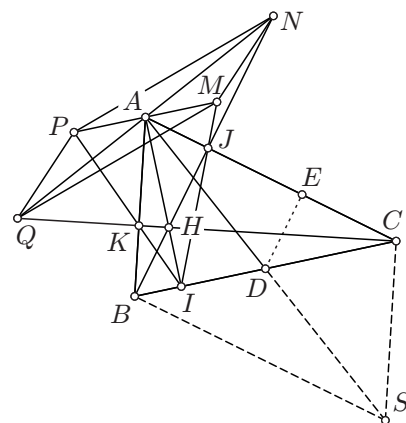
Pentru a arăta că $DIFJ$ este pătrat, rămâne să dovedim că segmentele DF și IJ au același mijloc. Fie K proiecția lui H pe AE . Din $\angle AID + \angle EIF = 90^\circ$ obținem $\angle AID = \angle EFI$, deci $\triangle AID \equiv \triangle EFI$ (I.U.), așadar $AI = EF = BE$. Astfel, K este mijlocul segmentului IB . Cum $HK \parallel BJ$, deducem că HK este linie mijlocie în triunghiul BIJ , deci H este și mijlocul segmentului IJ **2p**

Problema 4. Considerăm un triunghi ascuțitunghic ABC , cu $AB < AC$ și punctele D, I, J, K , astfel încât D este mijlocul laturii BC , iar I, J, K sunt picioarele înălțimilor din A, B , respectiv C ale acestuia. Perpendiculara în A pe dreapta AD intersectează dreptele BJ și CK în punctele N , respectiv Q , iar paralela prin A la BC intersectează dreptele IJ și IK în punctele M , respectiv P . Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

Soluție. Fie H ortocentrul triunghiului ABC . Patrulateralele $BIHK$ și $CIHJ$ sunt inscriptibile, deci $\angle HIK = \angle HBK = 90^\circ - \angle BAC = \angle JCH = \angle HIJ$, așadar IA este bisectoarea unghiului JIK . Cum $IA \perp BC$ și $MP \parallel BC$, reiese $IA \perp MP$. Deducem că IA este bisectoare și înălțime în $\triangle IMP$, deci acesta este isoscel și A este mijlocul segmentului MP **3p**

Fie S simetricul lui A față de punctul D . Deoarece D este și mijlocul segmentului BC , rezultă că $ABSC$ este paralelogram. Reiese $BS \parallel AC$ și, cum $BJ \perp AC$, deducem că $BJ \perp BS$. Din $\angle SBN = \angle SAN = 90^\circ$ rezultă că patrulaterul $SBAN$ este inscriptibil, prin urmare $\angle NSA = \angle ABN = 90^\circ - \angle A$. Analog rezultă $\angle QSA = \angle ACQ = 90^\circ - \angle A$, deci $\angle QSA = \angle NSA$. Astfel, în triunghiul SNQ , înălțimea SA este și bisectoare, prin urmare A este mijlocul laturii NQ **3p**

Diagonalele patrulaterului $MNPQ$ se înjumătățesc, așadar $MNPQ$ este paralelogram .. **1p**



Alternativă la partea a doua (3p). Fie E proiecția lui D pe AC . Avem $\angle DEA = \angle AJN = 90^\circ$ și $\angle DAE = 90^\circ - \angle NAJ = \angle ANJ$, deci $\triangle DAE \sim \triangle ANJ$. Rezultă $\frac{NA}{AD} = \frac{AJ}{DE} = 2 \frac{AJ}{BJ}$; analog, $\frac{QA}{AD} = 2 \frac{AK}{CK}$. Din $\triangle ABJ \sim \triangle ACK$ (U.U.) rezultă $\frac{AJ}{BJ} = \frac{AK}{CK}$, de unde $AQ = AN$.



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025

CLASA a VIII-a – soluții

Problema 1. Fie mulțimile

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ și } x + y + 1 = 0\}, \quad B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ și } x^3 + y^3 + 1 = 3xy\}.$$

a) Arătați că $A \subset B$.b) Arătați că mulțimea $B \setminus A$ are exact un element.*Soluție.* a) Dacă $(x, y) \in A$, atunci $y = -x - 1$ **2p**Reiese $x^3 + y^3 + 1 = x^3 - (x + 1)^3 + 1 = 3x(-x - 1) = 3xy$, deci $(x, y) \in B$ **2p**b) Dacă $(x, y) \in B$, atunci $x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0$, deci $(x + y)^3 - 3xy(x + y) - 3xy + 1 = 0$, sau $(x + y + 1)((x + y)^2 - (x + y) + 1) - 3xy(x + y + 1) = 0$, sau $(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1) = 0$.Pentru ca $(x, y) \in B \setminus A$ trebuie ca $x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = 0$, de unde $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$, adică $x = y = 1$. Cum $(1, 1) \notin A$, reiese $B \setminus A = \{(1, 1)\}$ **3p***Variantă pentru b).* Observăm că $(1, 1) \in B \setminus A$ **1p**Fie $(x, y) \in B$, $x = 1 + a$, $y = 1 + b$. Atunci $a^3 + b^3 + 3a^2 + 3b^2 - 3ab = 0$, sau $(a + b)(a^2 - ab + b^2) - 3(a^2 - ab + b^2) = 0$, deci $(a + b - 3)(a^2 - ab + b^2) = 0$. Dacă $a + b - 3 = 0$, atunci $x + y + 1 = 0$ și $(x, y) \in A$. Dacă $a^2 - ab + b^2 = 0$, atunci $a = b = 0$ și $(x, y) \in B \setminus A$. Astfel $B \setminus A$ conține doar elementul $(1, 1)$ **2p***Altă soluție.* Se știe că $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$. Reiese $x^3 + y^3 + 1 - 3xy = (x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y)$ **4p**Astfel, dacă $(x, y) \in A$, atunci $(x, y) \in B$ **1p**Apoi, dacă $(x, y) \in B \setminus A$, atunci $x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 0$ și finalizăm ca la prima soluție **2p****Problema 2.** Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $x^2 + y^2 + xy(x - y) = 17$.*Gazeta Matematică**Soluție.* Ecuația se scrie $(x - y)^2 + 2xy + xy(x - y) = 17$ **2p**Notăm $x - y = d \in \mathbb{Z}$, $xy = p \in \mathbb{N}$. Atunci egalitatea devine $p(d + 2) = 17 - d^2$, de unde

$$p = \frac{17 - d^2}{d + 2} \text{ } \mathbf{2p}$$

Obținem $p = \frac{13}{d + 2} + 2 - d \in \mathbb{N}$. Rezultă $d + 2 \in \{1, -1, 13, -13\}$, adică $d \in \{-1, -3, 11, -15\}$.Dacă $d = -1$, atunci $p = 16$, caz în care nu avem soluții, deoarece nu există două numere naturale cu produsul 16 și diferența -1 . Din $d = -3$ rezultă $p = -8 < 0$, care nu convine. Pentru $d = 11$, $p = -8 < 0$, nu convine. Dacă $d = x - y = -15$, atunci $p = xy = 16$, de unde obținem soluția (unică) $x = 1$, $y = 16$ **3p**

Altă soluție. Ecuația se scrie $(x - y)^2 + 2xy + xy(x - y) = 17$ **2p**
 Formăm o diferență de pătrate: $4(x - y)^2 + 4xy(x - y) + (xy)^2 - (xy)^2 + 8xy - 16 = 68 - 16$,
 adică $(2(x - y) + xy)^2 - (xy - 4)^2 = 52$. Reiese $(2x - 2y + xy - xy + 4)(2x - 2y + xy + xy - 4) = 52$,
 de unde $(x - y + 2)(x - y + xy - 2) = 13$ **2p**

Cum numerele x, y, z sunt naturale, sunt posibile cazurile

- $x - y + 2 = -13$ și $x - y + xy - 2 = -1$, deci $x - y = -15$, iar $xy = 16$, de unde $y = x + 15$ și $x(x + 15) = 16$. Cum x este natural, deducem că $x = 1$, apoi $y = 16$;

- $x - y + 2 = -1$ și $x - y + xy - 2 = -13$, deci $x - y = -3$, iar $xy = -8$, imposibil dacă x și y sunt naturale;

- $x - y + 2 = 1$ și $x - y + xy - 2 = 13$, deci $x - y = -1$ și $xy = 16$, imposibil dacă x și y sunt naturale;

- $x - y + 2 = 13$ și $x - y + xy - 2 = 1$, deci $x - y = 11$, iar $xy = -8$, imposibil dacă x și y sunt naturale **3p**

Problema 3. Numerele reale strict pozitive x, y, z verifică relațiile $xy + 4 \leq 2(x + z)$, $yz + 4 \leq 2(y + x)$, $zx + 4 \leq 2(z + y)$. Demonstrați că $x = y = z$.

Soluție. Ipoteza este $x(y - 2) \leq 2(z - 2)$, $y(z - 2) \leq 2(x - 2)$, $z(x - 2) \leq 2(y - 2)$ **2p**

Dacă $x - 2 < 0$, folosind relația a doua rezultă $z - 2 < 0$, apoi din prima obținem $y - 2 < 0$, deci $x, y, z \in (0, 2)$ și $xyz < 8$. Avem $x(2 - y) \geq 2(2 - z) > 0$, $y(2 - z) \geq 2(2 - x) > 0$, $z(2 - x) \geq 2(2 - y) > 0$. Înmulțind inegalitățile membru cu membru și împărțind la $(2 - x)(2 - y)(2 - z) > 0$, rezultă $xyz \geq 8$, contradicție cu $xyz < 8$ **2p**

Analog obținem că dacă $x > 2$, atunci $y > 2$ și $z > 2$, deci $xyz > 8$. Înmulțind relațiile ajungem apoi la $xyz \leq 8$ - contradicție **2p**

Așadar $x = 2$. Înlocuind în condițiile date obținem $y \leq z \leq 2 \leq y$, deci $x = y = z = 2$ **1p**

Altă soluție. Avem $ab + 4 - 2(a + b) = (a - 2)(b - 2)$, (1) **2p**

Presupunem că unul dintre numere este mai mic decât 2, de exemplu $x < 2$. Atunci $yz + 4 \leq 2(y + x) < 2y + 4$, deci $z < 2$. Reiese $xy + 4 \leq 2(x + z) < 2x + 4$, deci $y < 2$. Din (1) obținem $xy + 4 > 2(x + y)$ și analoagele, deci $\sum xy + 12 > 4 \sum x$, în contradicție cu ipoteza **3p**

Așadar $x, y, z \geq 2$. Din (1) reiese $xy + 4 \geq 2(x + y)$ și analoagele. Prin adunare obținem $\sum xy + 12 \geq 4 \sum x$. Coroborând aceasta cu ipoteza deducem că toate inegalitățile trebuie să fie egalități, deci $x = y = z = 2$ **2p**

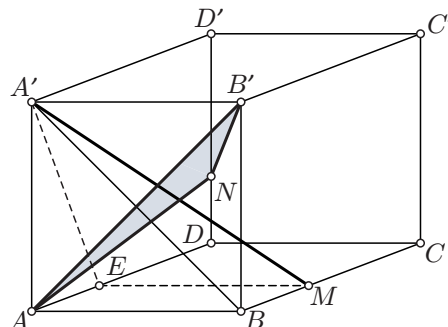
Problema 4. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub. Pe segmentele BC și DD' luăm punctele M , respectiv N , astfel încât $BM = DN$. Arătați că dreapta $A'M$ este perpendiculară pe planul $(AB'N)$.

Soluție. Din $BC \perp (ABB')$ și $AB' \subset (ABB')$ obținem $AB' \perp BC$. Cum $AB' \perp A'B$ (diagonale ale pătratului $ABB'A'$), reiese $AB' \perp (A'BC)$. Deoarece $A'M \subset (A'BC)$, obținem $A'M \perp AB'$, (1) **3p**

Fie $E \in (AD)$ astfel ca $AE = BM$. Atunci $ABME$ este dreptunghi, deci $AB \parallel ME$. Cum $AB \perp (ADA')$ și $AN \subset (ADA')$, rezultă $AN \perp ME$, (2) **2p**

Din $\triangle A'AE \equiv \triangle ADN$ (C.C.) obținem $\sphericalangle DAN = \sphericalangle AA'E$, de unde $\sphericalangle AA'E + \sphericalangle A'AN = \sphericalangle DAN + \sphericalangle A'AN = 90^\circ$. Astfel, $AN \perp A'E$. Folosind (2) obținem $AN \perp (A'EM)$, de unde $AN \perp A'M$. Aceasta, împreună cu (1), duce la $A'M \perp (AB'N)$

2p



**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025****CLASA a IX-a – soluții**

Problema 1. Fie $ABCD$ un paralelogram și O intersecția diagonalelor. Demonstrați că pentru orice punct $M \in (AB)$, există în mod unic punctele $N \in (OC)$ și $P \in (OD)$ astfel încât O este centrul de greutate al triunghiului MNP .

Soluție. Un punct $M \in (AB)$ este unic determinat de $k \in (0, \infty)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = k$, de unde avem $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OB}$ **2 puncte**

Pentru a găsi punctele N și P în mod unic, trebuie să găsim $x, y \in (0, \infty)$ în mod unic astfel încât $\frac{ON}{NC} = x$, $\frac{OP}{PD} = y$ și O este centrul de greutate al triunghiului MNP **2 puncte**

De aici avem $\overrightarrow{ON} = \frac{x}{x+1}\overrightarrow{OC} = -\frac{x}{x+1}\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OP} = \frac{y}{y+1}\overrightarrow{OD} = -\frac{y}{y+1}\overrightarrow{OB}$ **1 punct**

Deoarece $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ sunt necoliniari, O este centrul de greutate al triunghiului MNP dacă și numai dacă $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{k}$ și $\frac{y}{y+1} = \frac{k}{k+1} \Leftrightarrow y = k$, adică punctul N este unic determinat de raportul $x = \frac{1}{k} = \frac{ON}{NC}$, iar punctul P este unic determinat de raportul $y = k = \frac{OP}{PD}$, ceea ce încheie problema. **2 puncte**

Problema 2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\frac{1}{\{x\}} + \frac{1}{[x]} + \frac{1}{x} = 0,$$

unde $[x]$ și $\{x\}$ sunt partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

Gazeta Matematică

Soluție. Din condițiile de existență, $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} \cup [0, 1))$ **1 punct**
Ecuația din enunț este echivalentă cu:

$$\frac{[x] + \{x\}}{[x]\{x\}} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow -x^2 = [x]\{x\}. \quad (\star)$$

..... **1 punct**

Deoarece $-x^2 \leq 0$ și $x \neq 0$, avem că $[x]\{x\} < 0$, deci $[x] \leq -1$ **1 punct**

Dacă $[x] = -k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ecuația $(\star)$ devine $-x^2 = -k(k+x)$, ceea ce este echivalent cu $x^2 - kx - k^2 = 0$, având soluțiile $x_{1,2} = \frac{k \pm k\sqrt{5}}{2}$. Din $[x] = -k$, obținem că singura soluție posibilă ar fi $x_1 = \frac{k-k\sqrt{5}}{2}$ **2 puncte**

În final, trebuie să găsim valorile lui $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\left[\frac{k-k\sqrt{5}}{2}\right] = -k$, ceea ce este echivalent cu:

$$-k \leq k \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < -k + 1 \Leftrightarrow 3k \geq k\sqrt{5} > 3k - 2,$$

de unde obținem $k < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, adică $k \in \{1, 2\}$. De aici obținem soluțiile $x_1^* = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ și $x_2^* = 1 - \sqrt{5}$, care verifică ecuația dată. **2 puncte**

Problema 3. Determinați numerele reale pozitive a, b, c, d astfel încât $a + b + c + d = 80$ și

$$a + \frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+a+b} + \frac{d}{1+a+b+c} = 8.$$

Soluție. A două relație după adunare cu 4 în ambii membri se scrie:

$$1+a + \frac{1+a+b}{1+a} + \frac{1+a+b+c}{1+a+b} + \frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} = 12.$$

..... **2 puncte**

Aplicând inegalitatea mediilor succesiv obținem:

$$1+a + \frac{1+a+b}{1+a} \geq 2\sqrt{(1+a) \cdot \frac{1+a+b}{1+a}} = 2\sqrt{1+a+b};$$

$$\frac{1+a+b+c}{1+a+b} + \frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} \geq 2\sqrt{\frac{1+a+b+c}{1+a+b} \cdot \frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c}} = 2\sqrt{\frac{81}{1+a+b}}.$$

..... **2 puncte**

Prin adunarea celor două inegalități și aplicând din nou inegalitatea mediilor se ajunge la:

$$12 = 1+a + \frac{1+a+b}{1+a} + \frac{1+a+b+c}{1+a+b} + \frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} \geq 2\sqrt{1+a+b} + \frac{18}{\sqrt{1+a+b}} \geq 12.$$

..... **1 punct**

Observăm că avem egalitate în inegalitatea mediilor în toate cele trei cazuri de mai sus. De aici obținem $a+b=8$, respectiv $1+a = \frac{1+a+b}{1+a} = \frac{1+a+b+c}{1+a+b} = \frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} = 3$. Așadar, numerele căutate sunt $a=2, b=6, c=18, d=54$ **2 puncte**

Problema 4. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir crescător nemărginit de numere naturale cu $x_1 = 1$ și $x_{n+1} \leq 2x_n$, pentru orice $n \geq 1$. Demonstrați că orice număr natural nenul se poate scrie ca sumă finită de termeni distincți doi câte doi ai șirului $(x_n)_{n \geq 1}$.

Notă: Doi termeni x_i și x_j ai șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ se numesc distincți dacă $i \neq j$.

Soluție. Fie k un număr natural nenul astfel încât $1 \leq k < 2x_n$ pentru un $n \geq 1$ natural.

Vom demonstra prin inducție că putem scrie $k = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i$ cu $\varepsilon_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n}$. Deoarece șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este nemărginit, putem acoperi toate numerele naturale nenule cu această construcție.

..... **2 puncte**

Afirmația de mai sus este adevărată pentru $n=1$.

Presupunem că am demonstrat-o pentru $n=N$. Vom demonstra în continuare că orice

$1 \leq k < 2x_{N+1}$ se poate scrie $k = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i$ cu $\alpha_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, N+1}$ **1 punct**

Dacă $x_N = x_{N+1}$, atunci avem din ipoteza din inducție $k = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i x_i$ și putem scrie $\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i$,
cu $\alpha_i = \varepsilon_i$, $i = \overline{1, N}$, și $\alpha_{N+1} = 0$ **1 punct**
Dacă $x_N < x_{N+1}$, este suficient să considerăm valorile lui k pentru care $2x_N \leq k < 2x_{N+1}$,
deoarece cazul $k < 2x_N$ este acoperit de ipoteza de inducție. **1 punct**
În acest fel, $k - x_{N+1} \geq 2x_N - x_{N+1} \geq 0$ conform ipotezei problemei. Distingem două cazuri:
Cazul 1. Dacă $k - x_{N+1} = 0$, afirmația este evident adevărată.
Cazul 2. Dacă $k - x_{N+1} > 0$, folosim din nou ipoteza problemei și, din condiția:

$$0 < k - x_{N+1} < 2x_{N+1} - x_{N+1} \leq 2x_N,$$

conform ipotezei de inducție, putem scrie $k - x_{N+1} = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i x_i$ cu $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, N}$. Adunăm
 x_{N+1} în ambele părți ale egalității precedente și considerăm $\alpha_i = \varepsilon_i$ pentru $i = \overline{1, N}$ și $\alpha_{N+1} = 1$.
Inducția se încheie. **2 puncte**

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapă Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025****CLASA a X-a – soluții****Problema 1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\log_7(6^x + 1) = \log_6(7^x - 1).$$

*Gazeta Matematică**Soluția 1.* Notând $\log_7(6^x + 1) = \log_6(7^x - 1) = y$, obținem sistemul $6^x + 1 = 7^y$ și $7^x - 1 = 6^y$.

..... **2p**
 Prin adunare deducem că $6^x + 7^x = 6^y + 7^y$. Din injectivitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6^x + 7^x$ (care este strict crescătoare, ca sumă de două funcții strict crescătoare), obținem că $x = y$ **2p**

Determinarea lui x se reduce la rezolvarea ecuației $6^x + 1 = 7^x$, sau $\left(\frac{6}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x = 1$.

Considerăm funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$; relația precedentă se scrie sub forma $g(x) = g(1)$. Ținând cont de injectivitatea funcției g (care este strict descrescătoare, ca sumă de două funcții strict descrescătoare), conchidem că $x = 1$, valoare care verifică ecuația din enunț. **3p**

Soluția 2. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = \log_7(6^x + 1)$. Se arată că funcția f este inversabilă, cu inversa $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_6(7^x - 1)$ **2p**

Ecuația dată devine $f(x) = f^{-1}(x)$, iar aceasta este echivalentă cu $f(x) = x$, unde $x \in (0, \infty)$ **2p**

Determinarea lui x se reduce la rezolvarea ecuației $6^x + 1 = 7^x$, sau $\left(\frac{6}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x = 1$.

Considerăm funcția $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$; relația precedentă se scrie sub forma $g(x) = g(1)$. Ținând cont de injectivitatea funcției g (care este strict descrescătoare, ca sumă de două funcții strict descrescătoare), conchidem că $x = 1$ este unica soluție soluție a ecuației din enunț. **3p**

Problema 2. Aflați numerele reale x pentru care

$$3^x + 3^{[x]} + 3^{\{x\}} = 4.$$

($[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară ale numărului real x .)

Soluție. Nu există numere $x \in [1, \infty)$ cu proprietatea din enunț: dacă $x \geq 1$, atunci $[x] \geq 1$ și, cum $\{x\} \in [0, 1)$, obținem $4 = 3^x + 3^{[x]} + 3^{\{x\}} \geq 3 + 3 + 1 = 7$, fals. **1p**

Nu există nici numere $x \in (-\infty, -1)$ cu proprietatea din enunț: dacă $x < -1$, atunci $[x] \leq -2$ și, cum $\{x\} \in [0, 1)$, obținem $4 = 3^x + 3^{[x]} + 3^{\{x\}} < 3^{-1} + 3^{-2} + 3^1 = 3\frac{4}{9}$, fals. **2p**

Dacă $x \in [0, 1)$, atunci $[x] = 0$, $\{x\} = x$, deci egalitatea dată devine $3^x + 1 + 3^x = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^x = 3$. Obținem soluția $x_1 = 1 - \log_3 2$, care aparține intervalului $[0, 1)$ **2p**

Dacă $x \in [-1, 0)$, atunci $[x] = -1$, $\{x\} = x + 1$, deci egalitatea dată devine $3^x + \frac{1}{3} + 3^{x+1} = 4 \Leftrightarrow 4 \cdot 3^x = \frac{11}{3}$. Obținem soluția $x_2 = \log_3 \frac{11}{12}$, care aparține intervalului $[-1, 0)$.

În concluzie, există două numere reale, x_1 și x_2 , care au proprietatea din enunț. **2p**

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ cu proprietatea că

$$|wf(z) + zf(w)| = 2|zw|$$

pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$.

Soluție. Dacă f este o funcție cu proprietatea din enunț, luând $z = 1$ și $w = 0$ în relația dată, deducem că $f(0) = 0$. Pentru $w = z \in \mathbb{C}^*$ obținem că $|f(z)| = |z|$; cum această egalitate se verifică și pentru $z = 0$, rezultă că $|f(z)| = |z|$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$ **2p**

Atunci $|f(1)| = 1$ și, pentru $w = 1$ în ecuația funcțională, obținem

$$2|z| = |f(z) + zf(1)| \leq |f(z)| + |zf(1)| = 2|z|,$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$ **2p**

Rezultă că avem egalitate în inegalitatea triunghiului. Prin urmare, pentru fiecare $z \in \mathbb{C}$, există $t_z \in \mathbb{R}$, $t_z \geq 0$ (t_z depinde de z), astfel încât $f(z) = t_z \cdot f(1)z$. Trecând la modul și simplificând, deducem că $|f(z)| = t_z \cdot 1 \cdot |z| \Leftrightarrow 1 = t_z$, oricare ar fi $z \in \mathbb{C}^*$.

În concluzie, $f(z) = cz$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, unde $c = f(1)$ este un număr complex de modul 1. **2p**

Se verifică imediat faptul că orice funcție de forma $f(z) = cz$, unde $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, este soluție a ecuației funcționale din enunț. **1p**

Problema 4. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex cu $\angle A \equiv \angle C \equiv \angle E$ și $\angle B \equiv \angle D \equiv \angle F$.

a) Demonstrați că există un unic punct în plan care este egal depărtat de laturile AB, CD și EF ale hexagonului.

b) Dacă notăm cu P punctul de la a), iar $G_1 \neq G_2$ sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ACE respectiv BDF , arătați că $\angle G_1PG_2 = 60^\circ$.

Soluție.

a) Dacă notăm $\angle A = \angle C = \angle E = \alpha$ și $\angle B = \angle D = \angle F = \beta$, atunci suma măsurilor unghiurilor hexagonului $ABCDEF$ este $3\alpha + 3\beta = 720^\circ$, așadar $\alpha + \beta = 240^\circ$.

..... **1p**

Deoarece $\angle B + \angle C = \alpha + \beta = 240^\circ$, dreptele AB și CD se vor intersecta într-un punct situat în exteriorul hexagonului. Analog pentru dreptele CD și EF , respectiv EF și AB .

Notăm $\{X\} = AB \cap CD$, $\{Y\} = CD \cap EF$, $\{Z\} = EF \cap AB$. Centrul cercului înscris în triunghiul XYZ este unicul punct egal depărtat de laturile AB, CD și EF ale hexagonului.

..... **2p**

b) Triunghiul XYZ are toate unghiurile de 60° , deci este echilateral, iar P este centrul său. În planul complex, considerăm un reper cu originea în P și notăm cu literă mică afixul unui punct notat, corespunzător, cu litera mare. Din asemănarea $\triangle BCX \sim \triangle DEY \sim \triangle FAZ$ (u.u.), deducem că există $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ astfel încât

$$\frac{c-x}{b-x} = \frac{e-y}{d-y} = \frac{a-z}{f-z} = k \cdot \epsilon,$$

unde $\epsilon = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}$.

Obținem că $c-x = (b-x)k \cdot \epsilon$, $e-y = (d-y)k \cdot \epsilon$, $a-z = (f-z)k \cdot \epsilon$.

..... **2p**

Deoarece $p = \frac{x+y+z}{3} = 0$, prin adunare, deducem $c+e+a = (b+d+f) \cdot k \cdot \epsilon \Leftrightarrow g_1 = g_2 \cdot k \cdot \epsilon$.

Din ipoteza că $G_1 \neq G_2$ rezultă că g_1 și g_2 nu pot fi 0, deci G_1, G_2, P sunt puncte distincte două câte două.

Așadar $\frac{g_1-p}{g_2-p} = k \cdot \epsilon$, adică $\angle G_1 P G_2 = 60^\circ$ **2p**

**Olimpiada Națională de Matematică****Etape Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025****CLASA a XI-a – soluții**

Problema 1. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_2(1 + a_k) = 2$.

Gazeta Matematică

Soluție. Avem $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (inducție) și $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent, cu limita $\ell \in [0, 1)$. Trecând la limită în relația de recurență, obținem $\ell = \frac{\ell}{1 + \sqrt{1 + \ell}}$, de unde $\ell = 0$ **1p**

Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{1 + a_n}) = 2$ **1p**

Din relația de recurență rezultă $1 + a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

Atunci $\log_2(1 + a_{n+1}) = \frac{1}{2} \log_2(1 + a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\log_2(1 + a_1) = \log_2 2 = 1$, obținem $\log_2(1 + a_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (progresie geometrică cu primul termen 1 și rația 1/2) **1p**

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_2(1 + a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2$ **2p**

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Spunem că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă $\det(A + X_{ij}) = \det(A + X_{ji})$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, unde $X_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este matricea care are 1 pe poziția (i, j) și 0 în rest.

a) Arătați că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ și $\det(A) \neq 0$, atunci $A = A^T$.

b) Dați un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care are proprietatea $(\mathcal{P})$, dar $A \neq A^T$.

Soluție.

a) Fie $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Prin dezvoltare după linia i , obținem $\det(A + X_{ij}) = \det(A) + \delta_{ij}$, unde δ_{ij} este complementul algebric al elementului de pe poziția (i, j) al matricei A **1p**

Cum A are proprietatea $(\mathcal{P})$, rezultă $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, deci A^* (adjuncta lui A) este matrice simetrică **1p**

Notăm $d = \det(A) \neq 0$. Avem $AA^* = dI_n = (dI_n)^T = (A^*A)^T = A^T(A^*)^T = A^T A^*$ **2p**

Cum $d \det(A^*) = \det(AA^*) = \det(dI_n) = d^n$, iar $d \neq 0$, rezultă că matricea A^* este inversabilă. Atunci, din relația $AA^* = A^T A^*$, rezultă $A = A^T$ **1p**

b) Considerăm $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matricea care are 1 pe pozițiile $(1, 1)$ și $(1, 2)$ și 0 în rest. Cum $n \geq 3$, matricea $A + X_{ij}$ are cel puțin o linie nulă, deci $\det(A + X_{ij}) = 0$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Rezultă că A are proprietatea $(\mathcal{P})$, dar $A \neq A^T$ **2p**

Problema 3. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă și bijectivă, astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(f(x)/x)}{x} = 1.$$

a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$, pentru oricare $a > 0$.

b) Dați un exemplu de funcție f care satisface condițiile din enunț.

Soluție.

a) Avem $f(0) = 0$ (reducere la absurd). Atunci, pe baza ipotezei, deducem că f este strict crescătoare, cu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, iar $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ este strict crescătoare, cu $f^{-1}(0) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = \infty$ **1p**

Limita din ipoteză asigură existența unui număr $u > 0$ astfel încât $\frac{f^{-1}(f(x)/x)}{x} > \frac{1}{2}$, $\forall x > u$.

Rezultă $\frac{f(x)}{x} > f\left(\frac{x}{2}\right)$, $\forall x > u$. Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2}\right) = \infty$, obținem $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ **2p**

Fie $a > 0$, arbitrat, fixat.

Cazul $a = 1$ este clar.

Cazul $a \in (0, 1)$. Există $t > 0$ astfel ca $f^{-1}(x) > \frac{1}{a}$, $\forall x > t$. Rezultă

$$f^{-1}(x) > f^{-1}(ax) = f^{-1}(af(f^{-1}(x))) > f^{-1}\left(\frac{f(f^{-1}(x))}{f^{-1}(x)}\right), \forall x > t.$$

Obținem

$$\frac{f^{-1}(f(f^{-1}(x))/f^{-1}(x))}{f^{-1}(x)} < \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} < 1, \forall x > t.$$

Pe baza ipotezei și condiției $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = \infty$, obținem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(f(f^{-1}(x))/f^{-1}(x))}{f^{-1}(x)} \underset{y=f^{-1}(x)}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(f(y)/y)}{y} = 1.$$

Atunci, conform *criteriului clește*, rezultă $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$.

Cazul $a \in (1, \infty)$. Atunci $b = 1/a \in (0, 1)$. Conform cazului anterior, avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(ax)}\right)^{-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f^{-1}(b(ax))}{f^{-1}(ax)}\right)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

Rezultă $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$, $\forall a > 0$ **2p**

b) Exemplu. Funcția bijectivă $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = e^x - 1$, $x \in [0, \infty)$, cu inversa $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \ln(x + 1)$ satisface condițiile din enunț **2p**

Problema 4. Determinați toate tripletele de matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{aligned} A &= BC - CB \\ B &= CA - AC \\ C &= AB - BA \end{aligned}$$

Soluția 1. Dacă una dintre matricele A, B, C este nulă, atunci $A = B = C = O_2$ **1p**
 Presupunem că există matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{O_2\}$ care satisfac ecuațiile din enunț.
 Din $\text{tr}(BC - CB) = 0$ rezultă $\text{tr}(A) = 0$. Similar, $\text{tr}(B) = \text{tr}(C) = 0$ **1p**
 Din ecuația $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2$, rezultă $A^2 = aI_2$, unde $a = -\det(A)$.
 Similar, $B^2 = bI_2$ și $C^2 = cI_2$, cu $b = -\det(B)$ și $c = -\det(C)$ **1p**
 Înmulțind ecuația $A = BC - CB$ cu B la stânga și respectiv la dreapta, obținem relațiile
 $BA = B^2C - BCB = bC - BCB$ și $AB = BCB - CB^2 = BCB - bC$. Atunci $AB + BA = O_2$,
 iar din ecuația $C = AB - BA$, rezultă $C = 2AB$. Similar, $A = 2BC$ și $B = 2CA$ **1p**
 Atunci $A = -2CB = -2C(2CA) = -4C^2A = -4cA$. Similar, $B = -4aB$ și $C = -4bC$ **1p**
 Cum matricele A, B și C sunt presupuse nenule, obținem $a = b = c = -1/4$, deci avem
 $\det(A) = \det(B) = \det(C) = 1/4$. Rezultă că matricele A și B sunt de forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$
 și $B = \begin{pmatrix} s & t \\ u & -s \end{pmatrix}$, cu $x, y, z, s, t, u \in \mathbb{R}$, astfel încât $x^2 + yz = -1/4$ și $s^2 + tu = -1/4$.
 Din relația $AB + BA = O_2$ rezultă $2xs = -(yu + zt)$. Obținem:

$$4x^2s^2 = (yu + zt)^2 = (yu - zt)^2 + 4yztu \geq 4(yz)(tu) = 4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(s^2 + \frac{1}{4}\right).$$

Dar $x^2s^2 < \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(s^2 + \frac{1}{4}\right)$, $\forall x, s \in \mathbb{R}$. Contradicție.

Prin urmare, soluția unică a sistemului din enunț este $A = B = C = O_2$ **2p**

Soluția 2. Fie trei matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care satisfac sistemul de ecuații din enunț.
 Din $\text{tr}(BC - CB) = 0$ rezultă $\text{tr}(A) = 0$. Similar, $\text{tr}(B) = \text{tr}(C) = 0$ **1p**
 Atunci $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & -b_1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & -c_1 \end{pmatrix}$, cu $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.
 **1p**
 Obținem $BC - CB = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & 2(b_1c_2 - b_2c_1) \\ 2(b_3c_1 - b_1c_3) & -(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$ **1p**
 Deci $a_2 = 2(b_1c_2 - b_2c_1)$, de unde $a_2^2 = 2a_2(b_1c_2 - b_2c_1) = 2a_2b_1c_2 - 2a_2b_2c_1$. Similar, obținem:
 $b_2^2 = 2b_2c_1a_2 - 2b_2c_2a_1$ și $c_2^2 = 2c_2a_1b_2 - 2c_2a_2b_1$. Rezultă $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 0$. Cum $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$,
 obținem: $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ **2p**
 Analog arătăm $a_3 = b_3 = c_3 = 0$. Atunci $a_1 = b_2c_3 - b_3c_2 = 0$. Similar, $b_1 = c_1 = 0$.
 Prin urmare, soluția unică a sistemului din enunț este $A = B = C = O_2$ **2p**

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapă Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025****CLASA a XII-a – soluții**

Problema 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup, cu elementul neutru e , iar A o submulțime nevidă a sa. Notăm cu $AA = \{xy \mid x, y \in A\}$.

- a) Arătați că dacă G este finit, atunci $AA = A$ dacă și numai dacă $e \in A$ și $|AA| = |A|$.
 b) Dați un exemplu de grup G și o submulțime $A \subseteq G$, cu $AA \neq A$, $|AA| = |A|$ și $AA < G$.
 (Notăția $H < G$ înseamnă că H este un subgrup propriu al grupului G , adică un subgrup al lui G diferit de grupul G .)

*Gazeta Matematică***Soluție.**

- a) Dacă $AA = A$, atunci $|AA| = |A|$. Pentru orice $x \in A$ avem că $|xA| = |A| < \infty$ și $xA \subseteq AA = A$, astfel că $xA = A$. Dar atunci $x \in xA$, astfel că $e = x^{-1} \cdot x \in x^{-1} \cdot xA = A$.

..... **2p**
 Reciproc, dacă $e \in A$ și $|AA| = |A|$, avem că $A = e \cdot A \subseteq AA$ și cum $|A| = |AA| < \infty$, rezultă că $AA = A$ **2p**

- b) Fie $G = U_4 = \{1, i, -1, -i\}$ grupul rădăcinilor de ordinul 4 ale unității. Considerând $A = \{i, -i\}$, avem că $AA = \{i^2, i \cdot (-i), (-i)^2\} = \{1, -1\} = U_2 < U_4$, $|AA| = 2 = |A|$ și $AA \neq A$ (mai mult, $AA \cap A = \emptyset$). **3p.**

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar $H < G$ un subgrup propriu al lui G . Dacă există morfisme $f, g, h : G \rightarrow G$ ale grupului G , cu proprietatea că $f(xy) = g(x)h(y)$ pentru orice $x, y \in G \setminus H$, arătați că:

- a) $g = h$;
 b) dacă G este neabelian, iar $H = Z(G)$, atunci $f = g = h$.
 (Mulțimea $Z(G) = \{c \in G \mid cx = xc, \forall x \in G\}$ se numește centrul grupului G .)

Soluție.

- a) Notând cu e elementul neutru al grupului G , pentru orice $x \in G \setminus H$ avem că $x^{-1} \in G \setminus H$, astfel că

$$e = f(e) = f(x \cdot x^{-1}) = g(x) \cdot h(x^{-1}) = g(x) \cdot h(x)^{-1},$$

de unde rezultă că $g(x) = h(x)$ pentru orice $x \in G \setminus H$ **2p**
 Pentru orice $a \in H$, alegând un $x \in G \setminus H$ avem că $ax, x^{-1} \in G \setminus H$, astfel că:

$$g(a) = g(ax \cdot x^{-1}) = g(ax) \cdot g(x^{-1}) = h(ax) \cdot h(x^{-1}) = h(ax \cdot x^{-1}) = h(a).$$

Rezultă deci că $g = h$ **2p**

- b) Fie G neabelian și $H = Z(G)$. Ținând cont de punctul anterior avem că $g = h$, astfel că relația din enunț devine

$$f(xy) = g(x)g(y) = g(xy) \quad \text{pentru orice } x, y \in G \setminus Z(G).$$

Pentru orice $a \in Z(G)$ și $x \in G \setminus Z(G)$, avem $ax, x^{-1} \in G \setminus Z(G)$, astfel că:

$$f(a) = f(ax \cdot x^{-1}) = g(ax \cdot x^{-1}) = g(a).$$

..... **1p**
 Fie $x \in G \setminus Z(G)$. Atunci există $y \in G \setminus Z(G)$ cu proprietatea că $xy \neq yx$. Dacă $xy \in Z(G)$ atunci am avea

$$xy = y(xy)y^{-1} = yx \neq xy,$$

ceea ce reprezintă o contradicție. Prin urmare, $xy \in G \setminus Z(G)$, și, cum $y^{-1} \in G \setminus Z(G)$, avem:

$$f(x) = f(xy \cdot y^{-1}) = g(xy \cdot y^{-1}) = g(x).$$

Rezultă că $f = g$ și deci $f = g = h$ **2p**

Problema 3. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ două numere reale, cu $a < b$, iar $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție strict monotonă cu proprietatea că $\int_a^b f(x) dx = 0$. Arătați că $f(a) \cdot f(b) < 0$.

b) Determinați șirurile convergente $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale, pentru care există o funcție strict monotonă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x) dx = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Soluție.

a) Dacă $f([a, b]) \subseteq [0, \infty)$ sau $f([a, b]) \subseteq (-\infty, 0]$, atunci $m = |f(\frac{a+b}{2})| > 0$, iar pe unul dintre intervalele $(a, \frac{a+b}{2})$ sau $(\frac{a+b}{2}, b)$ are loc inegalitatea $|f(x)| > m$ pentru orice x din acel interval. Atunci

$$0 = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \geq m \cdot \frac{b-a}{2} > 0,$$

ceea ce este imposibil. Rezultă că $f(a) \cdot f(b) < 0$ **1p**

b) Vom arăta că singurele șiruri de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ care verifică condiția din enunț sunt șirurile constante și șirurile care iau exact două valori reale distincte și care devin staționare începând cu un anumit rang.

În mod evident, dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir constant, cu $a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, atunci șirul este convergent,

cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx = 0$ pentru orice $k \geq 1$ și orice funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Dacă $\{a_n | n \geq 1\} = \{a, b\}$ și există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ cu $a_n = a$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, și există funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2x - a - b$, care

este strict monotonă și verifică egalitățile $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx = 0$ pentru orice $k \geq 1$.

..... **1p**

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir convergent de numere reale pentru care există o funcţie strict monotonă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x) dx = \int_{a_2}^{a_3} f(x) dx = \dots = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx = \dots$$

Fie $I = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx$ pentru orice $k \geq 1$ şi $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Pentru un $r > 0$ fixat există atunci un rang $n_r \geq 1$, astfel încât $a_n \in (a - r, a + r)$ pentru orice $n \geq n_r$. Cum f este strict monotonă, dacă $M = \max(|f(a - r)|, |f(a + r)|)$, atunci $|f(x)| < M$ pentru orice $x \in (a - r, a + r)$. Pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\begin{aligned} p \cdot |I| &= |p \cdot I| = \left| \sum_{k=1}^p \int_{a_{n_r+k-1}}^{a_{n_r+k}} f(x) dx \right| = \left| \int_{a_{n_r}}^{a_{n_r+p}} f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{a_{n_r}}^{a_{n_r+p}} |f(x)| dx \right| < \int_{a-r}^{a+r} |f(x)| dx \leq 2r \cdot M. \end{aligned}$$

Rezultă că $0 \leq |I| < \frac{2Mr}{p}$, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$, astfel că $I = 0$ **2p**

Arătăm că $\text{card}(\{a_n | n \in \mathbb{N}^*\}) \leq 2$. Presupunând contrariul, ar exista $i, j, k \in \mathbb{N}^*$, cu $i < j < k$ astfel încât $a_i \neq a_j \neq a_k \neq a_i$. Avem că

$$\int_{a_i}^{a_j} f(x) dx = \sum_{l=i}^{j-1} \int_{a_l}^{a_{l+1}} f(x) dx = (j - i) \cdot I = 0$$

şi, de asemenea, $\int_{a_j}^{a_k} f(x) dx = (k - j) \cdot I = 0$, respectiv $\int_{a_i}^{a_k} f(x) dx = 0$ **1p**

Funcţia f fiind strict monotonă, rezultă atunci că

$f(a_i) \cdot f(a_j) < 0$, $f(a_i) \cdot f(a_k) < 0$ şi $f(a_j) \cdot f(a_k) < 0$. Dar atunci

$$(f(a_i) \cdot f(a_j) \cdot f(a_k))^2 = (f(a_i) \cdot f(a_j)) \cdot (f(a_i) \cdot f(a_k)) \cdot (f(a_j) \cdot f(a_k)) < 0,$$

ceea ce este absurd. **1p**

Contradicţia obţinută arată că presupunerea făcută este falsă, astfel că $\text{card}(\{a_n | n \in \mathbb{N}^*\}) \leq 2$. Convergenţa şirului $(a_n)_{n \geq 1}$ implică în plus, în cazul în care şirul nu este constant, că el este staţionar începând cu un anumit rang. **1p**

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Definim funcţia $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t) dt & , \text{dacă } x > 0, \\ f(0) & , \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Arătați că:

- a) funcția $\tilde{f}$ este continuă în 0 și derivabilă pe $(0, 1]$;
 b) are loc egalitatea

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 + \int_0^1 (f(x) - \tilde{f}(x))^2 dx.$$

Soluție.

a) Funcția f fiind continuă pe $[0, 1]$, rezultă că funcția $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ este derivabilă pe $[0, 1]$, cu $F' = f$. Rezultă atunci că funcția $\tilde{f}$ este derivabilă pe $(0, 1]$, ca produs de funcții derivabile.

..... **1p**
 Rămâne să mai arătăm doar că $\tilde{f}$ este continuă în 0. Cum f este continuă, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, astfel că, aplicând regula lui l'Hôpital, avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \tilde{f}(0),$$

și rezultă că $\tilde{f}$ este continuă în 0. **1p**

b) Fie $I = \int_0^1 f(x) dx$. Atunci $\tilde{f}(1) = I$. Ținând cont de a), funcția $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $G(x) = x \cdot (\tilde{f}(x) - I)^2$ este continuă în 0 și derivabilă pe $(0, 1]$. În plus avem $G(0) = 0 = G(1)$, **1p**
 respectiv

$$\begin{aligned} G'(x) &= (\tilde{f}(x) - I)^2 + 2x \cdot (\tilde{f}(x) - I) \cdot \tilde{f}'(x) = \\ &= (\tilde{f}(x) - I) \cdot \left(\tilde{f}(x) - I + 2x \cdot \left(\left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} \cdot f(x) \right) \right) = \\ &= (\tilde{f}(x) - I) \cdot (2f(x) - \tilde{f}(x) - I) = 2f(x) \cdot (\tilde{f}(x) - I) + I^2 - \tilde{f}^2(x) = \\ &= I^2 - 2If(x) + f^2(x) - (f(x) - \tilde{f}(x))^2, \quad \text{pentru orice } x \in (0, 1]. \end{aligned}$$

..... **2p**
 Deoarece există $\lim_{x \rightarrow 0} G'(x) = (I - f(0))^2 \in \mathbb{R}$, rezultă că G este derivabilă în 0, cu $G'(0) = (I - f(0))^2$, și G' este continuă pe $[0, 1]$. Obținem atunci:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(x) dx - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 - \int_0^1 (f(x) - \tilde{f}(x))^2 dx &= \\ = \int_0^1 \left(f^2(x) + I^2 - 2If(x) - (f(x) - \tilde{f}(x))^2 \right) dx &= \\ = \int_0^1 G'(x) dx = G(1) - G(0) = 0, \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează relația cerută. **2p**